Chap II : Outils nécessaires à l'étude des systèmes de points.

I Caractérisation d'un solide :

① repérage :

Un solide est le cas limite d'un système tel que les distances entre tous ses points sont constantes.

La position d'un solide sera fixée par la donnée de 3 points de ce solide soit 9 coordonnées.
Mais les distances étant constantes, il ne reste que 6 coordonnées indépendantes.

En fait, les liaisons entre solides réduisent très souvent ce nombre à beaucoup moins.

En général, on se donnera la position d'un point privilégié, le centre de masse, et on repèrera le solide par ses angles d'Euler (hors programme).

② centre d'inertie :

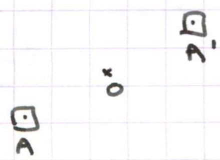
On appelle centre de masse d'un système (Σ) le barycentre des différents points de Σ affectés de leurs masses :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (1)$$

On peut aussi le définir par $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{GM_i} = \vec{0}$ ce qui revient au m̂.

Si un système matériel se décompose en sous-systèmes, on cherchera le centre de masse de chaque sous-système puis on cherchera le centre d'inertie global par associativité en affectant la masse de chaque sous-système à chaque G_i partiel.

Le centre de masse se trouvera au centre de symétrie, ou sur l'axe de symétrie ou sur le plan de symétrie du système. Il suffit pour le démontrer d'associer 2 à 2 des masses élémentaires symétriques.



La formule vectorielle (1) se réduira donc le plus souvent à une formule scalaire. Par exemple,

$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Le plus souvent, on aura affaire à des systèmes continus. On utilisera donc :

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{\iiint_{(V)} \vec{OM}\, \rho\, d\tau}{\iiint \rho\, d\tau}}$$

ρ masse volumique.

Le calcul de cet intégrale vectorielle nécessitera de projeter $\vec{OM}$

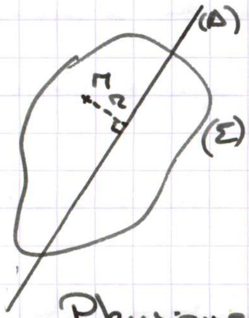
pour revenir à une intégrale scalaire. Des considérations de symétrie, permettront d'éviter 2 des 3 calculs. Un judicieux découpage permet de se ramener 9 fois sur 10 à une intégrale simple.

③ moment d'inertie par rapport à un axe Δ :

On appelle moment d'inertie J_Δ d'un système matériel (Σ) par rapport à un axe (Δ) la grandeur :

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

où r_i est la distance à (Δ) de la masse m_i.



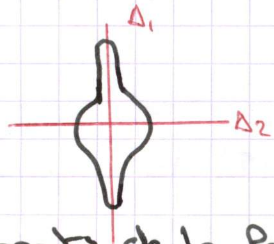
Si (Σ) est continu :

$$J_\Delta = \iiint_{(V)} r^2 \rho \, d\tau$$

C'est homogène à $M.L^2$

Physiquement cette grandeur traduira l'inertie du système vis à vis d'un mvt de rotation par rapport à l'axe (Δ)

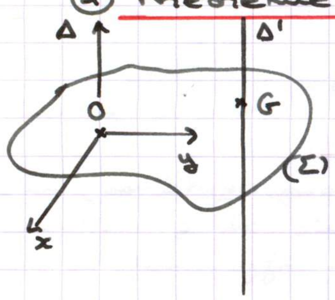
ex :



On voit bien que le comportement vis à vis de Δ_1 et Δ_2 ne sera pas le même.

Les moments de la feuille sont à savoir par coeur.

④ théorème d'Huyghens :



$G \left| \begin{array}{l} x_G \\ y_G \\ z_G \end{array} \right.$

Les 2 axes ont fixes !!

On connait par exemple J_Δ et on cherche J_G.

$$J_\Delta = \iiint r^2 \rho \, d\tau = \iiint \left[(x'+x_G)^2 + (y'+y_G^2) \right] \rho \, d\tau = \iiint (x'^2+y'^2) \rho \, d\tau + \iiint (x_G^2+y_G^2) \rho \, d\tau + \iiint (2x_G x' + 2y_G y') \rho \, d\tau$$

donc $J_\Delta = J_G + 2x_G \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\iiint x' \rho \, d\tau} + 2y_G \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\iiint y' \rho \, d\tau} + (x_G^2+y_G^2) \underbrace{\iiint \rho \, d\tau}_{M}$

car G centre de masse

donc $\boxed{J_\Delta = J_G + M R^2}$ R distance de G à Δ.

Bien sur $\Delta' \parallel \Delta$.

Ce chgt doit faire intervenir un axe passant par G.

* Changement de référentiel :

Cherchons $\vec{\sigma}_{O'}$: $\vec{\sigma}_{O'} = \sum_i \vec{O'M_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OM_i}) \wedge m_i \vec{v_i}$

On a donc $\vec{\sigma}_{O'} = \vec{\sigma}_O + \vec{O'O} \wedge \sum_i m_i \vec{v_i}$

donc $\vec{\sigma}_{O'} = \vec{\sigma}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{P}$ on retrouve bien la relation fondamentale des torseurs.

Rq: il n'y a pas d'expression simple pour $\vec{\sigma}_O$. C'est logique que vis à vis de la rotation, on ne puisse pas ramener le système au comportement d'un point.

② expression dans le référentiel barycentrique R^* :

Le référentiel barycentrique est le référentiel centré en G dont les axes restent parallèles au référentiel de Copernic.

Comme $\vec{\Omega}_{R^*/R} = \vec{0}$, la loi de composition des vitesses devient :

$$\vec{v} = \vec{v_G} + \vec{v}^* \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \vec{a_G} + \vec{a}^*.$$

Cherchons l'expression du torseur cinétique dans R^*. Pour la résultante :

$$\vec{P^*} = \sum m_i \vec{v_i^*} \qquad \text{or} \qquad \sum_i m_i \vec{GM_i} = \vec{0} \quad \text{par déf.}$$

donc $\vec{P}^* = \vec{0}$

et $\vec{\sigma}^* = \sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{v_i}^*$

Par contre comme $\vec{P}^* = \vec{0}$, $\vec{\sigma}_{O'}^* = \vec{\sigma}_O^*$. Donc $\vec{\sigma}^*$ est indépendant du point où on le calcule. On le note juste $\vec{\sigma}^*$. Il est cependant d'usage de le calculer en G.

③ théorème de Koënig relatif à $\vec{\sigma}$:

Ce théorème établit la relation entre $\vec{\sigma}$ et $\vec{\sigma}^*$. Démontrons-le.

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i} \qquad \text{or} \qquad \vec{v_i} = \vec{v_G} + \vec{v_i}^*$$

donc $\vec{\sigma}_O = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i (\vec{v_G} + \vec{v_i}^*) = \left(\sum_i m_i \vec{OM_i}\right) \wedge \vec{v_G} + \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i}^*$

donc $\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}^* + \vec{OG} \wedge M \vec{v_G}$ car $\sum_i m_i \vec{OM_i} = M\vec{OG}$

④ énergie cinétique :

Soit un ensemble de points $M_i(m_i, \vec{v_i})$ dans R. On définit l'énergie cinétique du système par :

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Il existe un deuxième théorème de König relatif à l'énergie cinétique permettant de relier K à K^*.

On a $\vec{v_i} = \vec{v_G} + \vec{v_i}^*$

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i (\vec{v_G} + \vec{v_i}^*)^2\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v_i}^*\right)}_{=0} \cdot \vec{v_G}$$

donc $$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + K^*$$

L'énergie cinétique d'un système est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse affectée de toute la masse du système et de son énergie cinétique barycentrique ou énergie cinétique interne.

IV Eléments dynamiques d'un système matériel :

① Torseur dynamique :

On définit le torseur dynamique par :

$$[\mathcal{J}_O] = [\vec{D}, \vec{\Gamma_O}] \quad \text{où} \quad \vec{D} = \sum_i m_i \vec{a_i} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma_O} = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{a_i}$$

On peut remarquer comme précédemment que :

$\sum_i m_i \vec{OM_i} = M \vec{OG}$ donc $\vec{D} = M \vec{a_G}$

La somme dynamique d'un système matériel est l'accélération du centre de masse affectée de la masse totale du système.

Si on change d'origine :

$$\vec{\Gamma_{O'}} = \sum_i \vec{O'M_i} \wedge m_i \vec{a_i} = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OM_i}) \wedge m_i \vec{a_i}$$

donc $$\vec{\Gamma_{O'}} = \vec{\Gamma_O} + \vec{O'O} \wedge \vec{D}$$ on retrouve la relation fondamentale des torseurs.

② Lien avec le torseur cinétique :

Calculons $\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{OM_i}}{dt} \wedge m_i \vec{v_i} + \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{a_i}$$

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \sum_i (\vec{v_i} - \vec{v_O}) \wedge m_i \vec{v_i} + \vec{\Gamma_O}$$

donc $$\vec{\Gamma_O} = \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} + \vec{v_O} \wedge M \vec{v_G}$$

C'est une relation très importante. Elle se réduit dans deux cas :

- le pt O est le centre de masse G (réf. barycentrique).
- le pt O est fixe.

On a alors : $$\vec{\Gamma_O} = \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt}$$

II Torseur :

① définition :

Soit un ensemble de points M_i et l'ensemble $\vec{a_i}$ des vecteurs associés – les M_i sont les points d'application des vecteurs $\vec{a_i}$ –.

On appelle torseur associé à ce système en un point O, l'objet mathématique :

$$[\vec{a}]_O = [\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_O] \quad \text{où} \quad \vec{R} = \sum_i \vec{a_i} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O = \sum_i \vec{OM_i} \wedge \vec{a_i}$$

$\vec{R}$ est la résultante et $\vec{\mathcal{M}}_O$ le moment en O. Un torseur est donc caractérisé par 6 coordonnées comme les solides. Il sera donc bien adapté à leur description.

* changement d'origine : si on cherche $[\vec{a}]_{O'}$, on remarque que la résultante ne change pas. Par contre pour le moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \sum_i \vec{O'M_i} \wedge \vec{a_i} = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OM_i}) \wedge \vec{a_i} = \vec{O'O} \wedge \sum_i \vec{a_i} + \vec{\mathcal{M}}_O$$

$$\text{donc} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}$$

C'est une relation fondamentale caractéristique des torseurs quels qu'ils soient.

* axe central Δ :

L'ensemble des pts A de l'espace tels que que $\vec{\mathcal{M}}_A \,//\, \vec{R}$ est une droite (Δ) parallèle à $\vec{R}$ appelée axe central du torseur. Le moment a en ces points une norme minimale.

② propriétés :

ⓐ invariants :

Au 1), on a vu que $\vec{R}$ ne change pas lors d'un chgt d'origine, c'est un invariant vectoriel.

Reprenons la relation de chgt d'origine : $\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}$

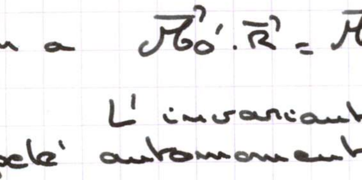
on a $\vec{\mathcal{M}}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{R} + (\vec{R} \wedge \vec{OO'}) \cdot \vec{R}$ le produit mixte est nul.

L'invariant $I = \vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O$ est un invariant scalaire appelé automoment en SI.

ⓑ équiprojectivité :

Reprenons encore la relation de chgt d'origine : $\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}$

On a $\vec{\mathcal{M}}_{O'} \cdot \vec{OO'} = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{OO'}$



La projection des moments sur $\vec{OO'}$ ne change pas. On dit que le champ de moments d'un torseur est un champ équiprojectif.

La réciproque est vraie : tout champ équiprojectif est le moment d'un torseur.

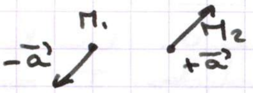
③ cas particuliers :

ⓐ couple :

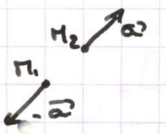
On appelle couple un torseur de résultante nulle : $\vec{R} = \vec{0}$

On a alors $\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O$.

Le moment d'un couple est indépendant du point O. On le notera sans indice.



$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{OM_1} \wedge -\vec{a} + \vec{OM_2} \wedge +\vec{a} = \vec{M_1M_2} \wedge \vec{a}$$



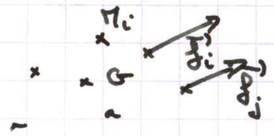
$\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$. Comme $\vec{R} = \vec{0}$, on parle de torseur nul.

ⓑ glisseur :

On appelle glisseur un torseur dont l'invariant scalaire est nul soit $\vec{R}.\vec{\mathcal{M}}_O = 0$

Le moment d'un glisseur est nul le long de son axe central.

Un champ de force uniforme est un glisseur. Démontrons-le.



$\vec{f_i} = m_i \vec{a}$ $\quad\vec{a}$ champ uniforme.

$$\vec{R} = \sum \vec{f_i} = \sum_i m_i \vec{a} = M \vec{a}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{OM_i} \wedge \vec{f_i} = \left(\sum m_i \vec{OM_i}\right) \wedge \vec{a}$$

or $\sum m_i \vec{OM_i} = M\vec{OG}$ donc $\vec{\mathcal{M}}_O = M\vec{OG} \wedge \vec{a} = \vec{OG} \wedge \vec{R}$

On a $I = \vec{R}.\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ cqfd.

III Éléments cinétiques d'un système matériel :

① torseur cinétique :

On appelle torseur cinétique la quantité :

$$[\vec{P_O}] = [\vec{P}, \vec{\sigma_O}] \quad \text{où} \quad \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v_i} \quad \text{et} \quad \vec{\sigma_O} = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i}$$

On remarque que $\sum_i m_i \vec{OM_i} = M\vec{OG}$. En dérivant $\sum_i m_i \vec{v_i} = M\vec{v_G}$ donc on obtient une expression simplifiée de $\vec{P}$.

$\vec{P} = M\vec{v_G}$. La quantité de mvt d'un système matériel est celle du centre de masse affecté de toute la masse du système.

MS

Chap III : Cinématique du solide.

I Cinématique du solide.

① définition du solide parfait :

Un solide parfait est un ensemble de points dont les distances restent invariables au cours du temps.

Le solide parfait est un cas limite : certains corps s'en rapprochent puisque leur forme ne dépend quasiment pas des actions qu'ils subissent.

② champ des vitesses d'un solide parfait :

Soient A et M deux pts du solide parfait (S). Par définition,

$AM^2 = cte$. En dérivant, $2\,\vec{AM} \cdot \frac{d\vec{AM}}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{AM} \cdot (\vec{v_M} - \vec{v_A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{AM} \cdot \vec{v_M} = \vec{AM} \cdot \vec{v_A} \quad (1)$

Le champ des vitesses est un champ équiprojectif. C'est donc le moment d'un torseur.
On note $\vec{\omega}(t)$ la résultante de ce torseur et on le nomme vecteur instantané de rotation.

Alors $\vec{v_A} = \vec{v_M} + \vec{AM} \wedge \vec{\omega}(t)$ (2) c'est la relation fondamentale des solides.

Rq : il est normal que d'après (1) $\vec{v_M}$ et $\vec{v_A}$ ne diffèrent que par une quantité orthogonale à $\vec{AM}$ d'où (2).

Rq : $[\vec{\omega}, \vec{v_M}]$ est le torseur des vitesses. Sa donnée soit 6 coordonnées détermine complètement les vitesses de tous les points du solide (S).

Rq : l'axe central du torseur est parallèle à $\vec{\omega}(t)$. C'est le lieu des points où la norme de la vitesse est minimale. D'où le nom de vecteur rotation pour $\vec{\omega}(t)$.

③ mouvements particuliers :

ⓐ mouvement de translation :

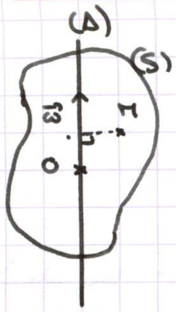
Le torseur des vitesses est un couple : $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$

donc $\forall M \in S \ \forall A \in S$, $\vec{v_M} = \vec{v_A}$ la vitesse est indépendante du pt M où on la cherche. On parlera de la vitesse $\vec{v}$ du solide.

Tous les points de S décrivent des courbes identiques déductibles les unes des autres par simple translation.

Une translation n'est pas forcément rectiligne. On peut avoir des translations circulaires ou elliptiques.
ex : grande roue : les cabines sont en transl. circulaire. 

b) rotation autour d'un axe fixe :



Les points appartenant à l'axe de rotation ont une vitesse nulle.

$\vec{v_M} = \vec{v_O} + \vec{OM} \wedge \vec{\omega}$

or $O \in (\Delta)$ donc $\vec{v_O} = \vec{0}$ et $\vec{v_M} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ (1)

Si on calcule $I = \vec{\omega} \cdot \vec{v_M} = 0$ donc le torseur des vitesses est dans ce cas un glisseur.

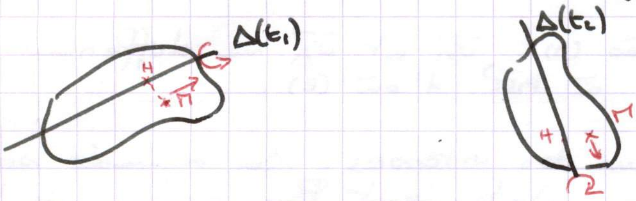
La comparaison de (1) avec les expressions vues au chap I du mvt de rotation prouve bien que la résultante du torseur des vitesses s'identifie bien au vecteur rotation. $\vec{\omega}(t)$ L'axe central du torseur (Δ) s'identifie à l'axe de rotation.

c) mvt quelconque :

Soit M un point quelconque de (S) et H un point de S qui appartient à l'axe instantané de rotation Δ(t).

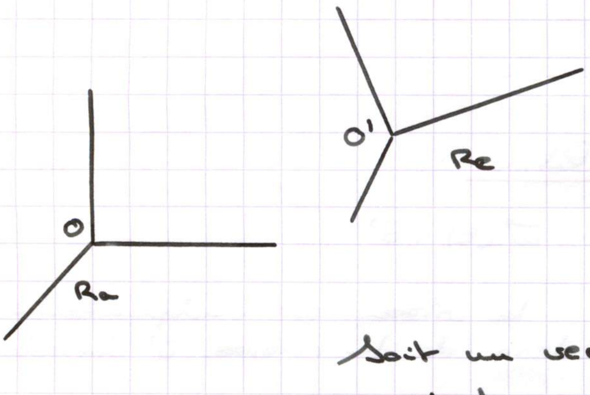
$$\vec{v_M} = \vec{v_H} + \vec{\omega} \wedge \vec{HM}$$

A t le mvt de M se décompose en un mvt de translation le long de Δ(t) à $\vec{v_H}$ et un mvt de rotation autour de Δ(t) avec la vitesse de rotation $\vec{\omega} \wedge \vec{HM}$. Le mvt est donc de type hélicoïdal. Mais à chaque instant, l'axe Δ(t) change.



II Changements de référentiel :

1) dérivation vectorielle :



Ra référentiel absolu
Re référentiel d'entraînement

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{Re/Ra}$ vecteur rotation

Ra est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Re " " " $(O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

Soit un vecteur $\vec{G} = G_x \vec{I} + G_y \vec{J} + G_z \vec{K}$

On cherche $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{Ra}$ sans pour autant disposer des coordonnées de G dans Ra.

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{Ra} = \frac{dG_x}{dt}\vec{I} + \frac{dG_y}{dt}\vec{J} + \frac{dG_z}{dt}\vec{K} + G_x\frac{d\vec{I}}{dt} + G_y\frac{d\vec{J}}{dt} + G_z\frac{d\vec{K}}{dt}$$

On $\vec{I} = \vec{O'I}$ donc $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{v_I} - \vec{v_{O'}}$ or le repère est un solide de référence donc $\vec{v_I} = \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'I}$ donc $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}$

On en déduit la loi de dérivation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Ra} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{Re} + \vec{\Omega} \wedge \vec{G} \qquad (1)$$

② composition des vitesses :

Soit M tel que $\vec{O'M} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}$ dans Re.

On a $\vec{v_r} = \dot{x}\vec{I} + \dot{y}\vec{J} + \dot{z}\vec{K}$ pour la vitesse relative dans Re.

Si on cherche $\vec{v_a}$, vitesse absolue dans Ra :

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{Ra} = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_{Ra} + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{Ra} = \vec{v_{O'}} + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{Re} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \quad \text{d'après (1).}$$

donc $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$ où $\vec{v_e} = \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}$

③ composition des accélérations :

Dérivons l'expression précédemment trouvée pour $\vec{v_a}$ par rapport au temps.

$$\vec{a_a} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right|_{Ra} + \left.\frac{d\vec{v_e}}{dt}\right|_{Ra} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right|_{Re} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v_r} + \vec{a_{O'}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{Ra}$$

donc $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_{O'}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v_r} + \vec{\Omega} \wedge \left(\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{Re} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \right)$

On a donc $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$

avec $\vec{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}$ accélération de Coriolis.

$\vec{a_e} = \vec{a_{O'}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$ accélération d'entraînement.

④ composition des vitesses angulaires :

Soit un solide (S) caractérisé par le torseur des vitesses absolu $[\vec{\omega_a}, \vec{v_a}(A)]$ et le torseur des vitesses relatives $[\vec{\omega_r}, \vec{v_r}(A)]$

$\forall M_i \in (S)$, on a $\vec{v_a}(M_i) = \vec{v_a}(A) + \vec{\omega_a} \wedge \vec{AM_i}$

$\vec{v_r}(M_i) = \vec{v_r}(A) + \vec{\omega_r} \wedge \vec{AM_i}$

or $\vec{v_a}(M_i) = \vec{v_r}(M_i) + \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M_i}$ et $\vec{v_a}(A) = \vec{v_r}(A) + \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'A}$

donc $\vec{v_r}(A) + \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'A} + \cancel{\vec{v_r}(A)} + \vec{\omega_a} \wedge \vec{AM_i}$

$= \vec{v_r}(A) + \vec{\omega_r} \wedge \vec{AM_i} + \vec{v_{O'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M_i}$

donc $\vec{\omega_a} \wedge \vec{AM_i} = \vec{\omega_r} \wedge \vec{AM_i} + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM_i}$

Ceci étant vrai quelque soit $M_i \in S$, on en déduit que :

$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_r} + \overrightarrow{\Omega}$$

III Eléments de réduction des torseurs cinétiques et dynamique :

① axes principaux d'inertie d'un solide :

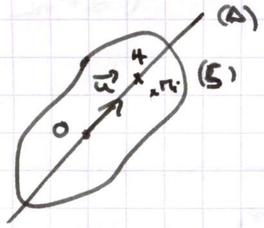
On se propose d'étudier ici un mvt de rotation du solide (S) autour d'un axe $\Delta(t)$. Soit $\vec{\omega}(t)$ le vecteur rotation instantanée.
Ce mvt se retrouve dans :
- le roulement sans glissement sur profil fixe
- le mvt de rotation autour d'un axe fixe
- le mvt barycentrique où $\Delta(t)$ passe par G.

En général, si O est un point de $\Delta(t)$, le calcul de $\vec{\sigma_O}$ pour le solide montre que $\vec{\sigma_O}$ n'est pas colinéaire à $\Delta(t)$.

On appelle axe principal d'inertie du solide (S) en O un axe Δ passant par O tel que pour une rotation instantanée autour de cet axe, $\vec{\sigma_O}$ est colinéaire à Δ.

On montre que :
* tout axe de symétrie est axe principal d'inertie
* tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie est axe principal d'inertie.
* tout axe de répétition d'ordre n — le système reste invariant dans toute rotation de $\frac{2\pi}{n}$ — est axe principal.
ex : grande diagonale d'un cube homogène est d'ordre 3.

② moment cinétique :



Soit $\vec{u}$ vecteur unitaire de l'axe instantané de rotation Δ.
Soit O un pt de Δ.

On appelle moment cinétique σ_Δ par rapport à Δ la grandeur scalaire :

$$\sigma_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\sigma_O}$$

Si on cherche l'expression de σ_Δ : $\quad \vec{v_{M_i}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM_i}$ car $\vec{v_H} = \vec{0}$

$$\vec{\sigma_O} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM_i}) = \sum_i \overrightarrow{HM_i} \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM_i}) + \sum_i \overrightarrow{OH} \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM_i})$$

or $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{c}$

donc
$$\vec{\sigma_O} = \left(\sum_i m_i HM_i^2\right)\vec{\omega} - \sum_i m_i \underbrace{(\overrightarrow{HM_i} \cdot \vec{\omega})}_{0} \overrightarrow{HM_i} + \sum_i m_i \underbrace{(\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{HM_i})}_{0} \vec{\omega} - \sum_i m_i \overrightarrow{HM_i} (\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\omega})$$

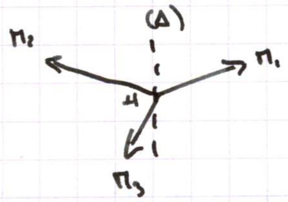
or HM_i = distance à l'axe.

donc $\quad \vec{\sigma_O} = J_\Delta \vec{\omega} - \sum_i m_i (\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{HM_i}$ (1)

d'où $\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta \omega}$.

Rq: si (Δ) est un axe principal d'inertie alors le 2° terme de (1) est nul et $\vec{\sigma_O}$ est colinéaire à Δ.

Si (Δ) est un axe de répétition d'ordre n, alors il existe $(M_1, M_2, \ldots M_n)$ tels que $\overrightarrow{HM_1}$, $\overrightarrow{HM_2}$, … $\overrightarrow{HM_n}$ se déduisent les uns des autres par rotation de $2\pi/n$.



$$\sum_i m_i(\overrightarrow{OH}\cdot\vec{\omega})\overrightarrow{HM_i} = (\overrightarrow{OH}\cdot\vec{\omega})\sum_i m_i(\overrightarrow{HM_1}+\cdots+\overrightarrow{HM_n}) = \vec{0}$$

On les associe par n-uplets pour la sommation.

③ moment dynamique :

On se place dans la même situation que précédemment.
(Δ) est un axe fixe instantané de rotation de vecteur unitaire $\vec{u}$
O est un pt fixe appartenant à Δ.

On appelle moment dynamique Γ_Δ par rapport à Δ la quantité scalaire :

$$\Gamma_\Delta = \vec{u}\cdot\vec{\Gamma_O}$$

Comme O est fixe $\vec{\Gamma_O} = \dfrac{d\vec{\sigma_O}}{dt} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\Gamma_O} = \dfrac{d\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma_O}}{dt}$ car $\vec{u}$ fixe

donc $\Gamma_\Delta = \dfrac{d\sigma_\Delta}{dt}$

soit $\boxed{\Gamma_\Delta = J_\Delta \dfrac{d\omega}{dt}}$

④ énergie cinétique :

On envisage toujours le solide (S) dans le cas du 2). O étant un point de vitesse nulle de l'axe Δ, on a :

$$\vec{v_{M_i}} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM_i}$$

donc $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{M_i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM_i})^2$

or $\|\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM_i}\| = \omega . OM_i . \sin(\vec{\omega},\overrightarrow{OM_i}) = \omega . HM_i$

donc $E_c = \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i HM_i^2\right) . \omega^2$

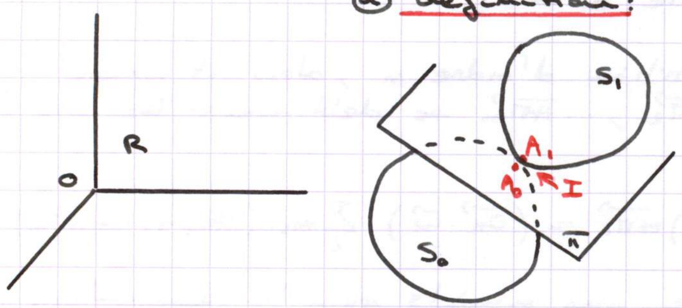
soit finalement : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \omega^2}$

La détermination des él^ts de réduction d'un système (S) sera préalable à toute résolution de pb de mécanique. On combinera les expressions ci-dessus avec les théorèmes de Koenig pour exprimer ces él^ts de réduction dans tous les cas.

IV Cinématique des solides en contact ponctuel :

① vitesse de glissement :

ⓐ définition :



Considérons deux solides S_0 et S_1 en mvt par rapport à R. On assimile la région de contact à un point de l'espace $I = I(t)$. On suppose les surfaces assez régulières pour qu'existent en I un plan tangent commun et une normale commune à S_0 et S_1.

3 pts interviennent ici :

- le pt géométrique I de contact
- le pt A_0 de S_0 qui coïncide avec I à t
- le pt A_1 de S_1 qui coïncide avec I à t.

On appelle vitesse de glissement $\vec{u}$ du solide S_1 par rapport à S_0 la vitesse par rapport à S_0 du pt A_1 de S_1 qui coïncide avec I à t.

Soit un repère R_0 lié à S_0. Appliquons la composition des mvts entre R et R_0 :

$$\vec{V}_{A_1}/R = \vec{V}_{A_1}/R_0 + \vec{V_e} \qquad \text{or } \vec{V_e} = \vec{V}_{A_0}/R \quad \text{définition de Sup.}$$

d'où l'expression de la vitesse de glissement :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{V}_{A_1}/R - \vec{V}_{A_0}/R}$$

Rq1 : $\vec{u}$ ne dépend que des solides en contact mais est indépendante du référentiel R où les solides S_0 et S_1 sont en mouvement.

Rq2 : $\vec{u}$ appartient au plan tangent (π)

Rq3 : Si S_0 est fixe alors $\vec{V}_{A_0}/R = \vec{0}$. On fait glisser S_1 sur un support fixe. L'expression de la vitesse de glissement $\vec{u}$ se comprend alors intuitivement.

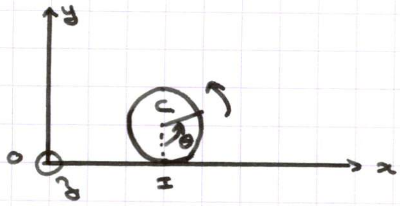
ⓑ roulement sans glissement :

On dit qu'il y a roulement sans glissement si la vitesse de glissement est nulle.

$$\vec{u} = \vec{0}$$

Dans le cas particulier important où il y a roulement sur un support fixe, $\vec{U} = \vec{0}$ se traduit par $\vec{V_A}/R = \vec{0}$. La vitesse du point de contact est nulle.

ex.



Soit une roue roulant sans glisser sur le sol horizontal. Elle est repérée par la position de C et l'angle θ dont elle tourne.
L'axe instantané de rotation est Cz.

Le vecteur rotation instantanée est $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e_z}$

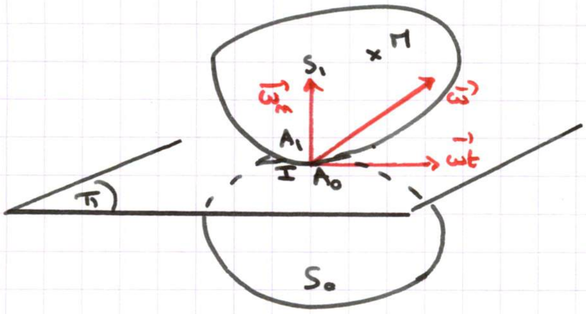
Ecrivons la condition de roulement sans glissement :

$$\vec{v_I} = \vec{0} = \vec{v_C} + \vec{\omega} \wedge \vec{CI}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{0} = \dot{x}_G\,\vec{e_x} + \dot{\theta}\,\vec{e_z} \wedge (-R\,\vec{e_y}) \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{x}_C = -R\dot{\theta}} \qquad (1)$$

Pour qu'il y ait roulement sans glissement, la condition ci-dessus doit être vérifiée. De 2 variables indépendantes, on tombe à une seule.

② pivotement et roulement :



Soit M un point de S_1.

Cherchons la vitesse de M par rapport au référentiel R_0 lié à S_0.

$$\vec{v_M} = \vec{v_{A_1}} + \vec{\omega} \wedge \vec{A_1M} \qquad (1)$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée de S_2. On le décompose en une composante appartenant au plan tangent π $\vec{\omega_t}$ et une composante normale $\vec{\omega_n}$: on a $\vec{\omega} = \vec{\omega_t} + \vec{\omega_n}$

$$\vec{v_{A_1}} = \vec{U} + \vec{v_{A_0}} = \vec{U} \quad \text{car} \quad \vec{V_{A_0}} = \vec{0} \text{ ds } R_0.$$

(1) devient : $\vec{v_M} = \vec{U} + \vec{\omega_t} \wedge \vec{A_1M} + \vec{\omega_n} \wedge \vec{A_1M}$

$\vec{U}$ est la vitesse de glissement

$\vec{\omega_t} \wedge \vec{A_1M}$ est la vitesse de roulement

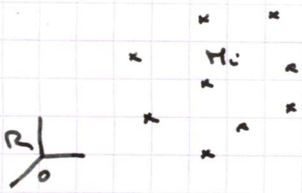
$\vec{\omega_n} \wedge \vec{A_1M}$ est la vitesse de pivotement (c'est logique $\vec{\omega_n}$ est porté par l'axe de pivotement).

Chap IV : Théorèmes généraux de la mécanique des systèmes

I Torseur des forces :

① définition :

Soit un système de points matériels Σ en mvt par rapport à R.



On suppose que M_i est soumis à une force totale $\vec{F_i}$ dont les sources peuvent être soit extérieures soit les autres points de Σ.

On va associer à ce système de forces un torseur dit torseur des forces :

$$[\vec{F}] = [\vec{R}, \vec{\mathcal{M}_O}] \quad \text{où} \quad \vec{R} = \sum_i \vec{F_i} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}_O} = \sum_i \vec{OM_i} \wedge \vec{F_i}$$

Le torseur des forces vérifie la relation fondamentale des torseurs :

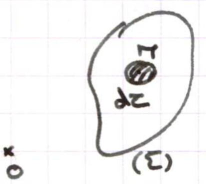
$$\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \sum_i \vec{O'M_i} \wedge \vec{F_i} = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OM_i}) \wedge \vec{F_i} = \vec{\mathcal{M}_O} + \vec{O'O} \wedge \sum_i \vec{F_i}$$

donc $\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \vec{\mathcal{M}_O} + \vec{R} \wedge \vec{OO'}$

Si $\vec{S} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{M}_O}$ est indépendant du point où on le calcule : on parle de couple.

On dira que deux systèmes de forces sont torsoriellement équivalents si les torseurs associés sont égaux. Par exemple le torseur associé aux forces de pesanteur - champ $\vec{g}$ supposé uniforme - est équivalent à une force unique dont le support passe par le centre d'inertie.

Si le système est continu (solide), on choisit une modélisation volumique : soit $\vec{f_v}$ la force volumique à laquelle est soumis Σ et soit $\vec{\gamma_v}$ le couple volumique éventuel.



On posera : $\vec{R} = \iiint_\Sigma \vec{f_v}\, d\tau \qquad \vec{\mathcal{M}_O} = \iiint_\Sigma \vec{OM} \wedge \vec{f_v}\, d\tau + \iiint_\Sigma \vec{\gamma_v}\, d\tau$

S'il n'y a pas de couple volumique, $\vec{\gamma_v} = \vec{0}$ alors

$$d\vec{R} = \vec{f_v}\, d\tau \quad \text{et} \quad d\vec{\mathcal{M}_O} = \vec{OM} \wedge \vec{f_v}\, d\tau$$

alors $d\vec{R} \cdot d\vec{\mathcal{M}_O} = 0$ donc $[d\vec{F}]$ est un glisseur. Il sera légitime de le représenter par un vecteur $d\vec{R}$ appliqué au centre de masse. C'est le cas pour $\vec{g}$ précédemment vu, $\rho\vec{E}$ force électrostatique.

Par contre, soit un échantillon de matière aimantée d'aimantation $\vec{M} = \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{d\tau}$ où $d\vec{\mathfrak{M}}$ est le moment magnétique de l'échantillon $d\tau$. Placé dans $\vec{B}$, cet échantillon subit un couple de moment $d\vec{\Gamma} = d\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$.

On introduira donc une densité de couple : $\vec{\gamma_v} = \vec{M} \wedge \vec{B}$. Le système continu ne sera pas assimilable à une collection de points.

② forces intérieures - forces extérieures :

Le pt M_i est soumis à une force globale $\vec{F_i}$. On pourra la décomposer en :

$$\vec{F_i} = \vec{F}_{i \leftarrow ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i \leftarrow j}$$

Les sources de $\vec{F}_{i \leftarrow ext}$ sont en dehors du système Σ, on parle de force extérieure.
Les sources de $\vec{F}_{i \leftarrow j}$ sont les autres points de Σ, on parle de force intérieure.

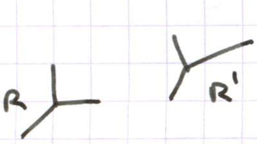
On décompose donc le torseur des forces en un torseur intérieur et un torseur extérieur :

$$[\vec{F}] = [\vec{F}_{ext}] + [\vec{F}_{int}]$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} [\vec{F}_{ext}] : & \vec{R}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i \leftarrow ext} & \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} = \sum_i \vec{OM_i} \wedge \vec{F}_{i \leftarrow ext} \\ [\vec{F}_{int}] : & \vec{R}_{int} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i \leftarrow j} & \vec{\mathcal{M}}_{O\,int} = \sum_{i,j} \vec{OM_i} \wedge \vec{F}_{i \leftarrow j} \end{array}}$$

③ cas des référentiels non galiléens :

Pour les référentiels non galiléens, chaque point du système Σ va subir les forces d'inertie d'entraînement et de coriolis.



$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$ $\qquad$ M_i subit : $\vec{f}_{ie} = -m_i\left(\vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M_i} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M_i})\right)$

$$\vec{f}_{ic} = -2m_i \vec{\Omega} \wedge \vec{v_{M_i}}$$

Nous les considérerons comme des forces volumiques :

$$\vec{f}_{ie} = -\mu \vec{a_e} \qquad \vec{f}_{ic} = -\mu \vec{a_c} \qquad \mu \text{ masse volumique.}$$

Il faudra donc ajouter les 2 torseurs associés au bilan des forces :

$$[\vec{f}_{ie}] = \left[\iiint_\Sigma -\mu \vec{a_e} d\tau \,,\, \iiint_\Sigma \vec{AM} \wedge (-\mu \vec{a_e}) d\tau \right] = \left[\vec{R}_{ie}, \vec{\mathcal{M}}_{A\,ie} \right]$$

$$[\vec{f}_{ic}] = \left[\iiint_\Sigma -\mu \vec{a_c} d\tau \,,\, \iiint_\Sigma \vec{AM} \wedge (-\mu \vec{a_c}) d\tau \right] = \left[\vec{R}_{ic}, \vec{\mathcal{M}}_{A\,ic} \right]$$

II Théorèmes généraux en référentiel galiléen :

① énoncé torsoriel du principe fondamental :

Soit un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R.

Soit $[\vec{P}]$ le torseur cinétique de Σ ds R. $\qquad [\vec{P}] = [\vec{P}, \vec{\sigma_O}]$

avec $\vec{P} = M \vec{v_G}$ et $\vec{\sigma_O} = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i}$

Soit $[\vec{\delta_O}]$ le torseur dynamique de Σ ds R : $\qquad [\vec{\delta_O}] = [\vec{D}, \vec{\Gamma_O}]$

avec $\vec{D} = M \vec{a_G}$ et $\vec{\Gamma_O} = \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} + \vec{v_O} \wedge \vec{P}$.

On suppose que (Σ) est soumis à un système de forces caractérisées par le torseur $[\vec{F}_{ext}]$.

Le principe fondamental s'énonce par :

$$\underline{[\vec{\mathcal{D}}_O] = [\vec{F}_{ext}]}$$

Dans un référentiel galiléen, le torseur des forces extérieures est égal au torseur dynamique.

Si le point O est un point fixe de R, l'énoncé se transforme en :

$$\underline{\frac{d[\vec{P}_O]}{dt} = [\vec{F}_{ext}]}$$

Rq1 : cette expression n'est valable que pour les référentiels galiléens.

Rq2 : seul le torseur des forces extérieures intervient dans le principe fondamental.

Rq3 : le postulat ne vaut que pour un système fermé.

② Théorème de l'action et de la réaction :

Décomposons le système (Σ) en deux sous-systèmes (Σ_1) et (Σ_2).
On notera :

$[\vec{F}_{1\leftarrow 2}]$ le torseur associé aux actions de (Σ_2) sur (Σ_1)

$[\vec{F}_{2\leftarrow 1}]$ le torseur associé aux actions de (Σ_1) sur (Σ_2).

Le principe fondamental appliqué à (Σ) puis (Σ_1) et (Σ_2) donne :

$$\Sigma : \quad \frac{d[\vec{P}_O]}{dt} = [\vec{F}_{ext}]$$

$$\Sigma_1 : \quad \frac{d[\vec{P}_O]_1}{dt} = [\vec{F}_{ext}]_1 + [\vec{F}_{1\leftarrow 2}]$$

$$\Sigma_2 : \quad \frac{d[\vec{P}_O]_2}{dt} = [\vec{F}_{ext}]_2 + [\vec{F}_{2\leftarrow 1}]$$

En raison de l'additivité de $\vec{P}_O$ et de $\vec{F}_{ext}$, on a immédiatement :

$$[\vec{F}_{1\leftarrow 2}] + [\vec{F}_{2\leftarrow 1}] = \vec{0}$$

En Sup, le principe de l'action et de la réaction était un postulat. Cela devient un théorème ici. On retrouve l'énoncé de Sup en réduisant (Σ_1) et (Σ_2) à des points matériels.

Si on fractionne le système (Σ) en une infinité de sous-systèmes, on peut montrer que le torseur associé aux forces intérieures est nul.

$$\underline{[\vec{F}_{int}] = \vec{0} \iff \vec{R}_{int} = \vec{0} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{O\,int} = \vec{0}}$$

③ Théorème de la résultante cinétique :

L'égalité torsorielle exprimant le principe fondamental comprend deux égalités vectorielles. Nous nous intéressons ici à la première.

$$\vec{S} = \vec{R}_{ext}$$

Soit $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{ext}$ ou $M\vec{a}_G = \vec{R}_{ext}$

Le mouvement du centre d'inertie G d'un système Σ est celui d'un point confondu avec G affecté de toute la masse du système et soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures agissant sur le système.

Si le système est isolé, $\vec{P}$ se conserve.

Ce théorème n'est pas sans rappeler le pfd.

④ Théorème du moment cinétique :

ⓐ expression générale :

La deuxième partie de l'égalité torsorielle s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext}$$

Si le point O est fixe : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext}$

Dans un référentiel galiléen, en un point fixe O, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du système fermé est égale au moment des actions extérieures qui s'exercent sur le système.

Soit A un point mobile :

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_O + \vec{P} \wedge \vec{OA}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{P} \wedge \vec{v}_A$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} + \vec{S} \wedge \vec{OA} + \vec{P} \wedge \vec{v}_A$$

or $\vec{S} = \vec{R}_{ext}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} + \vec{R}_{ext} \wedge \vec{OA} = \vec{\mathcal{M}}_{A\,ext}$

donc $\dfrac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G = \vec{\mathcal{M}}_{A\,ext}$

On reconnait dans le 1° membre $\vec{K}_A$ d'après la relation démontrée au chapitre précédent

d'où $\vec{K}_A = \vec{\mathcal{M}}_{A\,ext}$

C'est l'expression la plus générale.

(b) expression en référentiel barycentrique R^* :

On a vu dans le référentiel barycentrique que $\vec{\sigma_O} = \vec{\sigma}^* + \vec{OG} \wedge M\vec{v_G}$

C'est le 1er théorème de Koenig, $\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}^*_G$ est indépendant du point où on le calcule.

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} - \frac{d\vec{OG}}{dt} \wedge M\vec{v_G} - \vec{OG} \wedge M\vec{a_G}$$

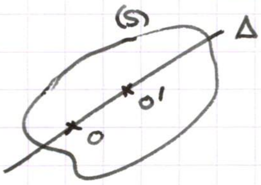
$$= \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} + \vec{R}_{ext} \wedge \vec{OG} = \vec{\mathcal{M}}_{G\,ext}$$

$$\text{d'où} \quad \underline{\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G\,ext}}$$

Le théorème du moment cinétique s'applique en G ~~dans~~ R^* sous cette forme simple que R^* soit galiléen ou non sans faire intervenir de forces d'inertie !!

Rq: Le a) nous donne en G que $\frac{d\vec{\sigma_G}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G\,ext}$ mais $\vec{\sigma_G}$ n'a pas grand intérêt car calculé par rapport à R - le sens physique n'est pas évident -. Par contre dans R^*, le mouvement sera souvent plus simple.

(c) expression scalaire :



Soit un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ et O un point de cet axe.

On appelle moment d'un système de forces par rapport à l'axe (Δ) la projection sur (Δ) du moment par rapport à O :

$$\underline{\mathcal{M}_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O}$$

C'est un scalaire indépendant du choix de O. En effet :

$$\mathcal{M}'_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{u} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}) = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_\Delta .$$

On a défini au chapitre précédent le moment cinétique du système par rapport à Δ :

$$\sigma_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\sigma_O} .$$

Calculons $\frac{d\sigma_\Delta}{dt}$: $\quad \frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma_O}} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O\,ext}$

$$\text{donc} \quad \underline{\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta}$$

Dans le cas d'un solide, $\sigma_\Delta = J_\Delta \cdot \omega$ où J_Δ est le moment d'inertie du système par rapport à Δ

$$\text{d'où} \quad \underline{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta}$$

III Théorème généraux en référentiel non galiléen :

① énoncé du principe fondamental :

On a vu au paragraphe I)3) que dans les référentiels non galiléens intervenaient deux torseurs $[\vec{f}_{ie}]$ et $[\vec{f}_{ic}]$ de composantes :

$$[\vec{f}_{ie}] = \left[\iiint_\Sigma -\mu \vec{a_e}\, d\tau \, , \iiint_\Sigma \vec{AM} \wedge (-\mu \vec{a_e})\, d\tau\right] = \left[\vec{R}_{ie}, \vec{\mathcal{M}}_{A\,ie}\right]$$

$$[\vec{f}_{ic}] = \left[\iiint_\Sigma -\mu \vec{a_c}\, d\tau \, , \iiint_\Sigma \vec{AM} \wedge (-\mu \vec{a_c})\, d\tau\right] = \left[\vec{R}_{ic}, \vec{\mathcal{M}}_{A\,ic}\right]$$

avec $\vec{a_e} = \vec{a_{O'}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$ où $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$

$\vec{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v_M'}$

Rq: $\vec{S}' = \sum_i m_i \vec{a_i}' = \sum_i m_i (\vec{a_i} - \vec{a_e} - \vec{a_c})$

$\vec{\mathcal{M}}_A' = \sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i \vec{a_i}' = \sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i (\vec{a_i} - \vec{a_e} - \vec{a_c})$

soit $[\vec{d_A}'] = [\vec{d_A}] + [\vec{f}_{ie}] + [\vec{f}_{ic}]$

Le pfd va s'écrire :

$$[\vec{d_A}] = [\vec{F}_{ext}] + [\vec{f}_{ie}] + [\vec{f}_{ic}] \quad (1)$$

② théorèmes généraux :

* Théorème de la résultante cinétique :

La 1° composante de l'égalité torsorielle (1) donne :

$$\vec{S}' = \vec{R}_{ext} + \vec{R}_{ie} + \vec{R}_{ic}$$

$$\frac{d\vec{P}'}{dt} = \vec{R}_{ext} + \vec{R}_{ie} + \vec{R}_{ic}$$

Dans un référentiel non galiléen R', il faut ajouter au bilan la résultante des forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

* Théorème du moment cinétique :

La 2° composante de l'égalité torsorielle (1) donne :

$$\vec{\Gamma}_A' = \vec{\mathcal{M}}_{A\,ext} + \vec{\mathcal{M}}_{A\,ie} + \vec{\mathcal{M}}_{A\,ic}$$

Dans un référentiel non galiléen R', il faut tenir compte du moment des forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

IV Analyse d'un problème de mécanique :

① méthode :

* choisir et définir le système Σ que l'on étudie.

* nature du référentiel. S'il est non galiléen, spécifier à ce niveau $\vec{a_{O'}}$ et $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$ afin de ne pas confondre avec d'autres vecteurs rotation pouvant intervenir dans le problème.

* dénombrer le nombre n de paramètres nécessaires et suffisants à la description du mouvement. Il faudra alors n équations.

* déterminer les torseurs des forces extérieures en notant soigneusement les points d'application. Faire attention aux liaisons (voir 2)

* appliquer les théorèmes généraux. Bien spécifier pour le moment cinétique le point O ou l'axe Δ et exprimer les moments du torseur des forces par rapport aux mêmes références. Essayer de choisir O ou Δ de manière à éliminer les actions de contact si elles sont inconnues - souvent -.

* résoudre les équations différentielles.

On peut avoir intérêt à décomposer parfois le système en sous systèmes, les forces sont alors à classer avec soin. Une force extérieure au sous-système Σ_1 peut être intérieure au système global Σ. C'est souvent le cas pour les liaisons.

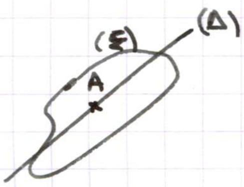
② aperçu des liaisons - liaisons parfaites :

Il y a en gros 2 types de liaisons :

- la liaison rotoïde (ou pivot) utilisée pour les mvts de rotation autour d'un axe fixe.

- la liaison rotule (ou sphérique) utilisée pour les mvts de rotation autour d'un point fixe. La combinaison de 3 liaisons rotoïdes permet de créer une liaison sphérique (liaison cardan).

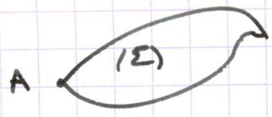
Une liaison rotoïde est parfaite si :



$$\vec{\mathcal{M}}_A(\text{liaison}) \perp (\Delta)$$

Ce qui ne signifie pas que $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$ mais que $\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ car $\vec{\omega}$ est // à Δ.

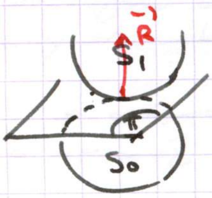
Une liaison sphérique est parfaite si :



$$\vec{\mathcal{M}}_A(\text{liaison}) = \vec{0}$$

Lors d'un glissement ~~ou roulement~~ sans frottement sur un support, la liaison est parfaite si :

$$\vec{R}(\text{liaison}) \perp (\Pi)$$

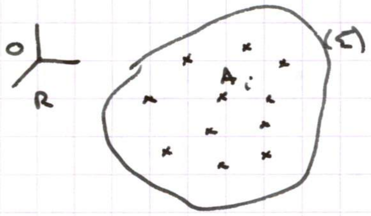


Ces résultats admis seront démontrés au chapitre suivant.

Chap V : Théorème de l'énergie cinétique. Energie potentielle - Energie mécanique

I Puissance et travail d'un système de forces :

① puissance :

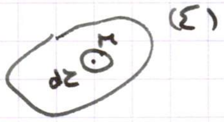


Soit un système (Σ) de pts A_i soumis à un système de forces $\vec{F_i}$.

Par définition, la puissance de ce système de forces relativement à R est :

$$P = \sum_i \vec{F_i} \cdot \vec{v_i}$$

Rq 1 : si le milieu est continu, on introduit les forces volumiques.



Soit l'élément de volume dτ entourant M. Il est soumis à la force $\vec{f_v} \cdot d\tau$ où $\vec{f_v}$ est une force volumique. On définit alors la puissance par :

$$P = \iiint_\Sigma \vec{f_v} \cdot \vec{v} \cdot d\tau$$

Rq 2 : changement de référentiel : d'après la loi de composition des vitesses : $\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$ où $\vec{v_e} = \vec{v_{o'}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{o'M}$ $\quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$

donc $P_a = \iiint_\Sigma \vec{f_v} \cdot \vec{v_a}\, d\tau = \iiint_\Sigma \vec{f_v} \cdot \vec{v_e}\, d\tau + \iiint_\Sigma \vec{f_v} \cdot \vec{v_r} = P_e + P_r$

Rq 3 : Séparons $\vec{F_i}$ en un terme de forces extérieures et un terme de forces intérieures.

On a $\vec{F_i} = \vec{F_{i\,ext}} + \sum_j \vec{F_{i\leftarrow j}}$

donc $P = \sum_{ij} \vec{F_{i\leftarrow j}} \cdot \vec{v_i} + \sum_i \vec{F_{i\,ext}} \cdot \vec{v_i} = P_{int} + P_{ext}$

La puissance d'un système de forces est la somme de la puissance des forces intérieures et de celle des forces extérieures.

② travail :

ⓐ définition :

Le travail élémentaire s'obtient à partir de la puissance par :

$$\delta W = P\,dt = \sum_i \vec{F_i} \cdot \vec{v_i}\, dt = \sum_i \vec{F_i} \cdot d\vec{OA_i}$$

alors $W = \sum_i \int \vec{F_i} \cdot d\vec{OA_i}$

La sommation se fait sur les divers A_i alors que l'intégrale se fait sur le déplacement.

On aura $W = W_{int} + W_{ext}$

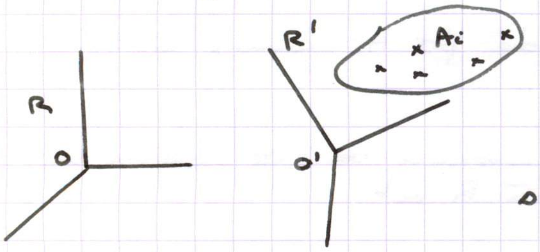
(b) travail des forces intérieures :

On a $P_{int} = \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} \cdot \vec{v}_i$

donc $\delta W_{int} = \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} \cdot d\vec{OA_i}$

Nous allons chercher P'_{int} dans un référentiel R' en mvt par rapport à R.

R' est caractérisé par $\vec{a_{O'}}$ et $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$.



$$P'_{int} = \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} \cdot \vec{v}_i' \quad \text{or } \vec{v}_i = \vec{v}_e + \vec{v}_i'$$

soit $\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'A_i} + \vec{v}_i'$

donc $P_{int} = \vec{v}_{O'} \cdot \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} + \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'A_i}) + \sum_{ij} \vec{F}_{i\leftarrow j} \cdot \vec{v}_i'$

soit $P_{int} = P'_{int} + \vec{v}_{O'} \cdot R_{int} + \underbrace{\sum_{ij} \vec{\Omega} \cdot (\vec{O'A_i} \wedge \vec{F}_{i\leftarrow j})}_{\vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{int}}$

or le torseur des forces intérieures est nul donc $P_{int} = P'_{int}$

La puissance des forces intérieures ne dépend pas du référentiel où on la calcule.

Rq : bien que le torseur des forces intérieures soit nul, sa puissance n'est en générale pas nulle si le système est déformable.

Prenons 2 pts soumis à la seule force d'intéraction.

$$\delta W_{int} = \vec{F}_{1\leftarrow 2} \cdot d\vec{OA_1} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \cdot d\vec{OA_2}$$

or $\vec{F}_{2\leftarrow 1} + \vec{F}_{1\leftarrow 2} = \vec{0}$ donc $\delta W_{int} = \vec{F}_{1\leftarrow 2} \left(d\vec{OA_1} - d\vec{OA_2} \right)$

donc $\delta W_{int} = \vec{F}_{1\leftarrow 2} \cdot d\vec{A_2A_1}$

Si la distance A_1A_2 varie δW_{int} n'est pas nul.

(c) travail des forces extérieures :

On a $P_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext} \cdot \vec{v}_i$

donc $\delta W_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext} \cdot d\vec{OA_i}$

Prenons quelques exemples :

* forces de pesanteur :

$$\delta W = \sum_i m_i \vec{g} \cdot d\vec{OA_i} = \vec{g} \cdot \sum_i d\vec{OA_i}\, m_i = \vec{g} \cdot M\, d\vec{OG}$$

donc $W = Mg(z_{G_1} - z_{G_2})$ si $\vec{g} = -g\vec{e_z}$

* forces d'inertie d'entraînement de translation :

On suppose que $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et que $\vec{a_e}$ se réduit à $\vec{a_{o'}}$.

$$\delta W = \sum_i - m_i \vec{a_{o'}} \cdot d\vec{O'A_i} = - \vec{a_{o'}} \, M \, d\vec{O'G}$$

C'est le même cas que précédemment. Si $\vec{\Omega}$ n'est pas nul, l'expression n'est pas simple.

* forces d'inertie de Coriolis :

$$\delta W = \sum_i - m_i (2\vec{\Omega} \wedge \vec{v_i}) \cdot \vec{v_i} dt = 0$$

Les forces d'inertie de Coriolis ne travaillent jamais.

③ cas des solides :

Considérons que le système (Σ) est un solide (S) alors

$\forall M \in S, \forall O \in S, \quad \vec{v_M} = \vec{v_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ $\quad [\vec{v_O}, \vec{\omega}]$ torseur des vitesses du solide.

$$P = \iiint_S \vec{f_v} \cdot \vec{v} \, d\tau = \iiint_S \vec{f_v} \cdot \vec{v_O} \, d\tau + \iiint \vec{f_v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \, d\tau$$

donc $P = \left(\iiint \vec{f_v} \cdot d\tau\right) \cdot \vec{v_O} + \left(\iiint \vec{OM} \wedge \vec{f_v} \, d\tau\right) \cdot \vec{\omega}$

donc $$P = \vec{R} \cdot \vec{v_O} + \vec{\mathcal{M}_O} \cdot \vec{\omega}$$

Pour un solide, comme $[\vec{F_{int}}]$ est nul, $P_{int} = 0$. La puissance des forces intérieures est nulle.

Alors pour S, $$P = \vec{R_{ext}} \cdot \vec{v_O} + \vec{\mathcal{M}_{O\,ext}} \cdot \vec{\omega}$$

En règle générale, la puissance de tout torseur nul est nulle pour un solide. C'est la conséquence de la rigidité.

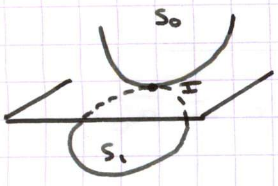
Pour un mvt de translation $(\vec{\omega} = \vec{0})$, $P = \vec{R_{ext}} \cdot \vec{v_O}$. On retrouve la définition de Sup pour le pt matériel qui ne peut rouler ou pivoter.

Pour un mvt de rotation autour d'un axe fixe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$P = \vec{\mathcal{M}_{O\,ext}} \cdot \vec{\omega} = (\vec{\mathcal{M}_{O\,ext}} \cdot \vec{u}) \, \omega = \mathcal{M}_\Delta \cdot \omega$$

On aura dans ce cas $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_\Delta \, d\theta$ si $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

④ contact entre solides :



Soient 2 solides en contact en un pt I. Les actions de contact sont représentées par le torseur $[\vec{R}, \vec{\mathcal{M}_I}]$.

La puissance de ces actions est :

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v_I} + \vec{\mathcal{M}_I} \cdot \vec{\omega}$$

* le contact est ponctuel : $\vec{\mathcal{M}_I} = \vec{0}$ et $P = \vec{R} \cdot \vec{v_I}$.

S'il y a roulement sans glissement alors $\vec{v_I} = \vec{0}$. Les forces de contact ne travaillent pas.

S'il n'y a pas de frottement alors $P = 0$ par définition. On en déduit que $\vec{R} \perp \vec{v_I}$. Ce résultat est connu depuis longtemps.

* le contact n'est plus ponctuel mais I est fixe : $\vec{v_I} = \vec{0}$

- Liaison rotoïde : $P = \vec{\mathcal{M}_I} \cdot \vec{\omega} = (\vec{\mathcal{M}_I} \cdot \vec{u})\, \omega = \mathcal{M}_\Delta \cdot \omega$.

Pour que la liaison soit parfaite, il faut $P = 0$ donc $\vec{\mathcal{M}_I}$ doit être perpendiculaire à l'axe de rotation soit $\mathcal{M}_\Delta = 0$.

- Liaison sphérique : $P = \vec{\mathcal{M}_I} \cdot \vec{\omega}$. Ici $\vec{\omega}$ a 3 composantes.

Donc pour que la liaison soit parfaite, il faut $\vec{\mathcal{M}_I} = \vec{0}$.

II Théorème de l'énergie cinétique :

① énoncé :

Reprenons le théorème de la résultante cinétique pour un pt A_i :

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{} \iff \frac{d\vec{p_i}}{dt} \cdot \vec{v_i} = \vec{} \cdot \vec{v_i}$$

Donc

$$P = \sum_i \vec{F_i} \cdot \vec{v_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

donc $$\frac{dE_c}{dt} = P = P_{int} + P_{ext}$$

La dérivée de l'énergie cinétique d'un système de pts matériels est égale à la puissance du système de forces qu'il subit.

Rq : le TEC est le seul théorème à faire intervenir la puissance des forces intérieures qui n'est en général pas nulle.

On peut le retenir sous sa forme intégrée :

$$\Delta E_c = W_{int} + W_{ext}$$

② cas du solide :

Comme pour un solide $P_{int} = 0$, on aura une forme simplifiée du TEC :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}$$

③ cas d'un ensemble de solides :

Soit un solide (S) formé de la réunion du solide (S_1) et du solide (S_2). La puissance des actions intérieures à (S_1) et (S_2) est nulle. Par contre, la liaison entre (S_1) et (S_2) qui sera ici une force intérieure n'aura pas nécessairement une puissance nulle.

Le TEC devient alors : $$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + \sum_{i,j} P_{int}(S_i \rightleftarrows S_j)$$

On a ici bien sûr généralisé à un solide $(S) = \{S_1, S_2, \dots S_n\}$.

Si les liaisons sont parfaites ou s'il n'y a pas glissement ou s'il n'y a pas de frottement, la puissance des liaisons entre les divers sous-systèmes sera nulle. Il faut tout examiner au cas par cas.

④ énoncé en référentiel non galiléen :

On a vu qu'en référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie. On a montré que :

$$P_{coriolis} = \sum_i -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v_i}) \cdot \vec{v_i} = 0$$

$$P_{entrainement} = \sum_i -m\vec{a_e} \cdot \vec{v_i} \quad \text{où} \quad \vec{a_e} = \vec{a_O} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

Le TEC en référentiel non galiléen s'exprime donc par :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext} + P_{entrainement}.$$

III Energie potentielle - Energie mécanique :

① force dérivant d'un potentiel :

On dit qu'une force dérive d'un potentiel si :

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}}\,U \qquad U \text{ potentiel ou énergie potentielle.}$$

Une force qui dérive d'un potentiel est dite conservative. Son travail ne dépend pas du chemin suivi :

$$W = \int_A^B \vec{f} \cdot \vec{dr} = -\int_A^B \vec{\text{grad}}\,U \cdot \vec{dr} = -\int_A^B dU = U(A) - U(B).$$

② énergie potentielle :

ⓐ définition :

Soit un système (Σ) de pts $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Supposons que les forces intérieures dérivent d'un potentiel $Ep_{int} = Ep_{int}(x_1, y_1, z_1 \dots)$ alors chaque point A_i subit :

$$\vec{F_{i\,int}} = -\overrightarrow{\text{grad}_i}\, Ep_{int} = -\frac{\partial Ep_{int}}{\partial x_i}\vec{e_x} - \frac{\partial Ep_{int}}{\partial y_i}\vec{e_y} - \frac{\partial Ep_{int}}{\partial z_i}\vec{e_z}$$

Le travail élémentaire s'exprime alors par : $\delta W_{int} = \sum_i \vec{F_{i\,int}}\, d\vec{OA_i}$

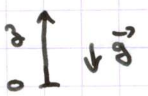
soit $\delta W_{int} = \sum_i -\overrightarrow{\text{grad}_i}\, Ep_{int}\, d\vec{OA_i} = -dEp_{int}$.

On appelle Ep_{int} l'énergie potentielle interne du système. Comme les forces intérieures constituent un torseur nul, P_{int} ne dépend donc pas du référentiel où on la calcule. Il en est de même pour Ep_{int}.

On peut refaire le même raisonnement avec les forces extérieures et définir une énergie potentielle Ep_{ext}.

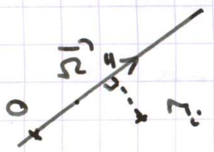
ⓑ exemples :

* champ de pesanteur : on a vu que $\delta W = -mg\,dz_G$



On pose $Ep = mgz_G + cte$. C'est l'énergie potentielle de pesanteur.

* force centrifuge : $\vec{a_e} = -\sum_i m_i \Omega^2 \vec{H_iM_i}$ avec $\vec{\Omega} = cte$ et $\vec{a_O} = \vec{0}$



$$\delta W = +\sum_i m_i \Omega^2 \vec{H_iM_i} \cdot \underbrace{d\vec{OM_i}}_{d(\vec{OH_i} + \vec{H_iM_i})}$$

On pose $Ep = -\sum \frac{1}{2} m_i \Omega^2 H_iM_i^2 + cte$

soit $Ep = -\frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2 + cte$

③ énergie mécanique :

On va séparer dans les forces intérieures et les forces extérieures celles qui sont conservatives et celles qui ne le sont pas.

$$P_{int} = -\frac{dEp_{int}}{dt} + P'_{int} \qquad P_{ext} = -\frac{dEp_{ext}}{dt} + P'_{ext}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{dEc}{dt} = P'_{int} + P'_{ext} - \frac{dEp_{int}}{dt} - \frac{dEp_{ext}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(Ec + Ep_{int} + Ep_{ext}) = P'_{int} + P'_{ext}.$$

Soit $\frac{dE}{dt} = P'_{int} + P'_{ext}$ $E = E_c + E_{p\,int} + E_{p\,ext}$

E est l'énergie mécanique du système : c'est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle totale

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives.

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives alors l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

IV Energie interne - Lien avec la thermodynamique :

1) définition :

On appelle énergie interne d'un système matériel (Σ) la somme de son énergie cinétique calculée dans R^* et de son énergie potentielle interne.

$$U = E_c^* + E_{p\,int}$$

2) expression du théorème de l'énergie cinétique :

A l'aide du théorème de Koenig : $E_c = E_c^* + \frac{1}{2}M v_G^2$, on peut exprimer le TEC.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M v_G^2 + E_c^* + E_{p\,int} + E_{p\,ext}\right) = P'_{int} + P'_{ext}. \quad (1)$$

or $M\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{F_i}}_{\text{cons}} + \underbrace{\sum_i \vec{F'_i}}_{\text{non cons}}$ $\iff$ $M d\vec{v_G}\cdot\vec{v_G} = \sum_i \vec{F_i}\cdot\vec{v_G}dt + \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_G}dt$

tout s'applique en G.

Si on suppose que les $\vec{F_i}$ sont issus d'un champ uniforme (par ex $\vec{g}$), on a alors :

$$d\left(\frac{1}{2}M v_G^2\right) = -dE_{p\,ext} + \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_G}dt.$$

(1) devient $dU = \delta W'_{int} + \delta W'_{ext} - \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_G}dt$

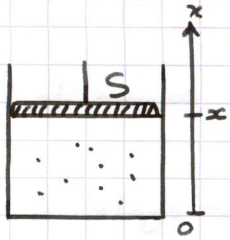
or $\delta W'_{ext} - \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_G}dt = \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_i}dt - \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_G}dt = \sum_i \vec{F'_i}\cdot\vec{v_i^*}dt$

$= \delta W'^*_{ext}$

d'où $dU = \delta W'^*_{int} + \delta W'^*_{ext}$

↳ ne dépend pas du référentiel.

3) lien avec la thermodynamique :



Soit un système (Σ) formé d'un gaz de N particules.

Les forces intérieures (nulles pour le GP ou Van der Waals) sont conservatives donc $\delta W'^{*}_{int} = 0$.

Cherchons W'^{*}_{ext}. R^* est ici le réf. lié au cylindre. Si le déplacement est quasi-statique, $\vec{F'}_{ext} = -pS\,\vec{e_x}$

alors $\delta W_{ext} = -\int_{x_1}^{x_2} +pS\,dx = p\Delta V$

donc $\Delta U = W_{pression}$.

En fait, en Sup, on a montré que le bilan ne peut s'expliquer uniquement en terme d'énergie thermique. Les processus d'interaction thermiques nécessitent l'introduction d'un terme supplémentaire dans le bilan : le transfert thermique Q.

$$\Delta U = W + Q.$$

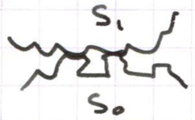
Chap VI : Actions de contact entre solides

I Actions de contact :

① nature physique des actions de contact :

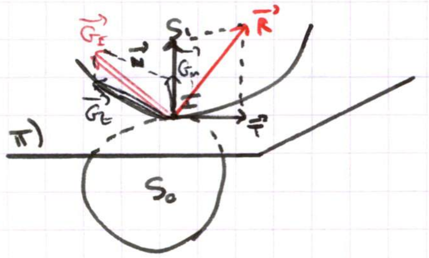
Les actions de contact ne sont rien d'autre que des forces électromagnétiques qui s'exercent entre les particules chargées appartenant aux deux solides.

La très grande complexité microscopique de la distribution des atomes dans la région de contact rend impossible ou quasiment impossible un calcul rigoureux des actions de contact.



On se contentera donc de lois expérimentales approchées.

② modélisation :



On va modéliser les actions de contact qu'exerce S_0 sur S_1 en considérant que la surface de S_0 en contact avec S_1 subit un ensemble de forces auquel on associe un torseur dit torseur des actions de contact.

$[R] = [\vec{R}, \vec{G_I}]$ I est un point de la surface de contact.

Soit $\vec{n}$ la normale au plan tangent commun, on a :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

$\vec{T}$ réaction tangentielle $\in \pi$ ou force de frottement ou force de résistance au glissement.
$\vec{N} \parallel \vec{n}$ réaction normale.

$$\vec{G_I} = \vec{G_{t_I}} + \vec{G_{n_I}}$$

$\vec{G_{t_I}}$ moment de résistance au roulement
$\vec{G_{n_I}}$ " " " au pivotement.

Si le contact est quasiponctuel alors toutes les forces passent par I.
On aura $\vec{G_I} = \vec{0}$.

Le problème est que ces forces de contact sont inconnues et que vu le nombre de paramètres des problèmes, il n'est pas possible de les déterminer sans hypothèses supplémentaires.

II Lois de Coulomb sur le frottement solide :

① réaction normale $\vec{N}$:

La réaction normale exercée par S_0 sur S_1 est dirigée vers l'intérieur de S_1. C'est normal puisque $\vec{N}$ s'oppose à la pénétration de S_1 dans S_0. $\vec{N}$ est une force répulsive.

De même la réaction normale qu'exerce S_1 sur S_0 est $-\vec{N}$.

La norme de $\vec{N}$ dépend des conditions du mouvement ou de l'équilibre et des autres actions extérieures qui s'exercent sur S.

C'est une des inconnues des problèmes de mécanique.

② réaction tangentielle $\vec{T}$:

ⓐ cas du glissement :

Il y a 3 lois empiriques dites lois de Coulomb.

1° loi : la force de frottement $\vec{T}$ est colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{v}$.

2° loi : la force de frottement $\vec{T}$ a un sens opposé à celui de la vitesse de glissement. On a. $\vec{T} \cdot \vec{v} < 0$.

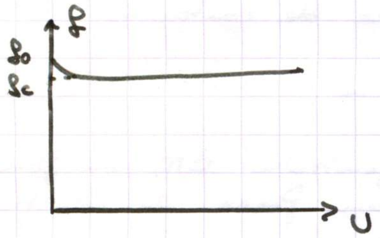
3° loi : pour une vitesse de glissement donnée, la norme de $\vec{T}$ est proportionnelle à la norme de $\vec{N}$.

$$\boxed{T = f N}$$

f est le coefficient de frottement. Il dépend de la nature des surfaces en contact.

Par exemple :

acier – acier	$f = 0,2$
bois – bois	$f = 0,3$
garniture frein – acier	$f = 0,4$
caoutchouc – bitume	$f = 0,5$



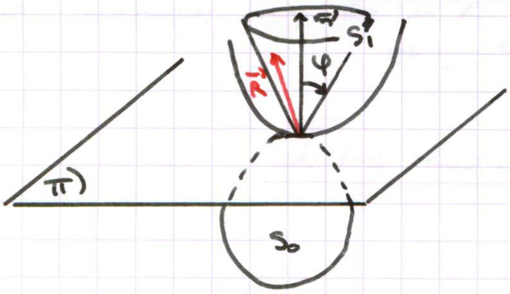
f est quasiment constant quand la vitesse de glissement varie. Il y a toutefois une légère diminution au départ.

On parle de coefficient de frottement statique f_0 pour $v = 0$ et de coefficient de frottement cinétique pour $v \neq 0$.

On définit l'angle de frottement φ par : $tg\varphi = \frac{T}{N}$

d'où $tg\varphi = \frac{T}{N} = f$.

ⓑ cas du non-glissement :



S'il n'y a pas glissement – on exerce une traction $\vec{F}$ dans π de module croissant –, v vitesse de glissement reste nulle tant que $R < f_0 N$.

$$T < f_0 N$$

$\vec{R}$ doit rester dans le cône de frottement d'angle au sommet φ tel que $tg\varphi = f_0$.

En résumé :

pas de glissement	$U=0$	$T<f_0N$
limite de glissement	$U\simeq 0$	$T=f_0N$
glissement	$U\neq 0$	$T=f_cN$

Rq: il existe des lois similaires lorsque le contact n'est plus ponctuel pour les moments.

Essayons de faire pivoter une roue de voiture. Il faut exercer un moment supérieur à une valeur minimale. On écrit :

$\mathcal{M}_n \leq \lambda_p N$ tant qu'il n'y a pas pivotement.
$\mathcal{M}_n = \lambda_p N$ en limite de pivotement.
$\mathcal{M}_n = \lambda'_p N$ en pivotement établi.

λ_p et λ'_p sont les coefficients de frottement de pivotement statique et cinétique.

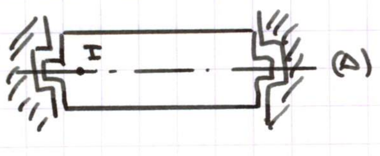
Essayons maintenant de faire rouler la même roue. Il faut exercer un moment supérieur à une valeur minimale :

$\mathcal{M}_t \leq \delta N$ pas de roulement
$\mathcal{M}_t = \delta . N$ limite de roulement.
$\mathcal{M}_t = \delta_c N$ roulement établi.

δ et δ_c sont les coefficients de frottement de roulement statique et cinétique.

III Liaisons entre solides:

1) Liaison rotoïde:



Cette liaison rotoïde ou liaison pivot impose un mouvement autour d'un axe fixe donc à un seul degré de liberté.
La liaison est caractérisée par le torseur.
$[\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_I]$

Pour que cette liaison soit parfaite, il faut que la puissance des actions de contact soit nulle soit :

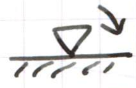
$$\mathcal{P} = \underbrace{\vec{R}.\vec{v}}_{\substack{0 \\ \text{axe fixe}}} + \vec{\mathcal{M}}_I.\vec{\omega} = 0 \qquad \text{donc } \vec{\mathcal{M}}_I.\vec{u} = 0$$

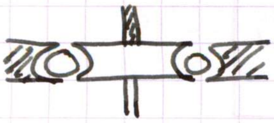
soit $\mathcal{M}_\Delta = 0$

Physiquement une liaison parfait permet la mise en mvt du solide (S) à l'aide d'un système de forces de moment négligeable.
En effet $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{ext} + \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_{ext}$. Dès que $\mathcal{M}_{ext} \neq 0$, σ_Δ croit linéairement.

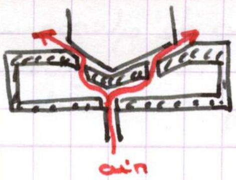
On peut réaliser cette liaison de diverses manières :


contact ponctuel (horlogerie)


contact à couteau (balance).



roulement à billes



coussin d'air.

② liaison sphérique :

support coquille

Le point O est fixe mais le solide garde tout de même 3 degrés de liberté.

Cette liaison est parfaite si $P = 0$

soit $P = \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{v}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{noix fixe.}}} + \vec{\mathcal{M}_0} \cdot \vec{\omega} = 0$

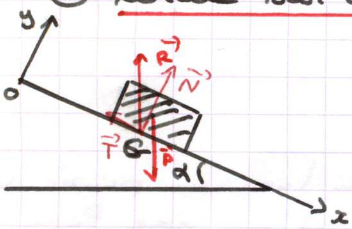
Comme $\vec{\omega}$ a ici 3 composantes, la condition ci-dessus impose que

$$\vec{\mathcal{M}_0} = \vec{0}$$

On peut réaliser en pratique cette liaison d'une autre manière en combinant trois liaisons rotoïdes : on parle alors de liaison cardan.

IV Exemples :

① solide sur un plan incliné :



Soit un solide (S) posé sur un plan incliné. On cherche la condition d'équilibre de ce solide. On donne le coefficient de frottement statique f.

syst : solide S.
réf : Labo galiléen.
bilan : $\vec{P} = + mg \sin\alpha \, \vec{e_x} - mg \cos\alpha \, \vec{e_y}$
$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T \, \vec{e_x} + N \, \vec{e_y}$

Ecrivons l'équilibre : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}$

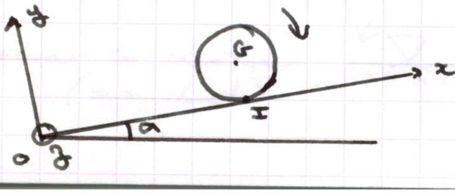
$\Leftrightarrow$ $T = - mg \sin\alpha < 0$

$N = mg \cos\alpha > 0$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut $T < f N$ soit $\boxed{\operatorname{tg}\alpha < f}$

En toute rigueur, il faudrait montrer qu'en égard à sa géométrie (S) ne bascule pas sur son arête. C'est l'application du théorème du moment cinétique qui le permet.

② roue motrice :



Soit une roue de rayon r, de masse m mise en mouvement par un couple moteur $\Gamma \vec{e_z}$ afin de lui faire remonter la pente.
Le coefficient de frottement est f.

M 12

syst : roue
réf : labo galiléen.
bilan : poids $[m\vec{g}, \mathcal{M}_G]$
réaction $[\vec{T}+\vec{N}, \mathcal{M}_G]$
couple moteur $[\vec{0}, -M\vec{e_z}]$

Appliquons les théorèmes généraux pour chercher la condition pour que la roue roule sans glisser à vitesse constante vers $x>0$.

$$m\vec{a_G} = m\vec{g}+\vec{T}+\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{\sigma_G}}{dt} = \vec{GG}\wedge m\vec{g} + \vec{GI}\wedge\vec{T}$$

Sachant que $\vec{a_G}=\vec{0}$ et $\frac{d\vec{\sigma_{Gz}}}{dt}=-J_{Gz}\cdot\ddot{\theta}=0$ car $\vec{\omega}=-\dot{\theta}\vec{k}$ voir ⊗

$$\begin{cases} T - mg\sin\alpha = 0 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$-J_{Gz}\ddot{\theta} = -M + rT$$

pas de glissement $\Rightarrow T < fN$

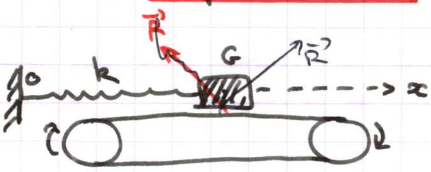
soit $\underline{M < fmgr\cos\alpha}$

⊗ Si on impose une vitesse v donnée, comme $\vec{v_I}=\vec{0}$ alors :

$$\vec{v_I}=\vec{v_G}+\vec{\omega}\wedge\vec{GI} \iff v\vec{e_x}+(-\dot{\theta}\vec{k})\wedge(-r\vec{e_y})=0$$

$$v = r\dot{\theta} \quad \text{donc} \quad \frac{d\sigma_{Gz}}{dt}=0$$

③ <u>tapis roulant</u> :



Soit une masse m au repos sur un tapis roulant défilant à la vitesse v par rapport au sol. La masse est reliée à un pt fixe O par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0.

On appelle f le coefficient de frottement statique et $f_c \neq f_0$ pour le coefficient dynamique.
On s'attend à un mvt périodique. La masse entraînée par le tapis s'éloigne. Dès que la tension du ressort est suffisament forte, il y a retour.

* Phase de non glissement :

$$m\vec{g}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}=\vec{0} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} &N = +mg \\ &T - k(x-x_0)=0 \end{aligned}$$

Cette phase dure tant que $T < f_0 N$. Sachant que $x = vt + x_0$,

$$T < f_0 N \iff kvt < f_0 mg \quad \text{soit} \quad t < \frac{mg f_0}{kv}.$$

* Phase de glissement :

$$m\vec{g}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{F} = m\vec{a_G} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} &m\ddot{x} = +T - k(x-x_0) \\ &N = +mg \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}(x-x_0) = +f_c g$$

$$\text{donc} \quad x - x_0 = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_c mg}{k}$$

or à $t=t_0$ $\quad x = vt_0 = \frac{fmg}{k} = A\sin\varphi - \frac{fmg}{k}$ $\quad \tan\varphi = \frac{2fmg}{kv}\omega_0 = \frac{2fg}{\omega_0 v}$

$\dot{x} = v = A\omega_0\cos\varphi$

donc $\tan\varphi = \frac{2fg}{v\omega_0}$ et $A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega_0^2} + \frac{4f^2m^2g^2}{k^2}} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{v^2+4f^2g^2}$

donc $\quad x - x_0 = A\sin\omega_0(t-t_0) - \frac{fmg}{k}$

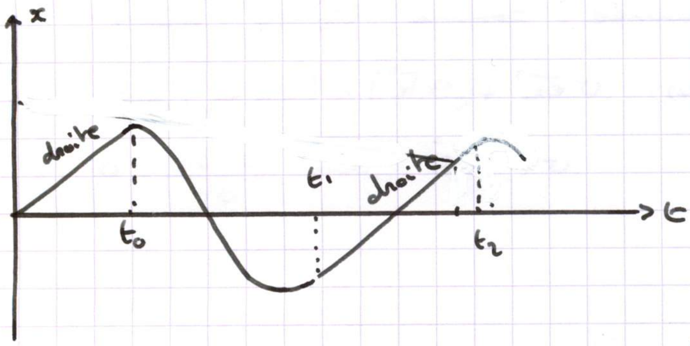
Le mvt est sinusoïdal jusqu'au moment où $\dot{x} = v$

soit $\cos(\omega_0(t_1 - t_0)+\varphi) = \frac{v}{A\omega_0} = \cos\varphi$

soit

$\omega_0(t_1-t_0)+\varphi = 2\pi - \varphi$ car $t_1 \neq t_0$

donc $\quad t_1 - t_0 = 2\,\frac{\pi-\varphi}{\omega_0} = \frac{2\left(\pi - \arctan\frac{2fg}{\omega_0 v}\right)}{\omega_0}$



Il y a ensuite une autre phase de non glissement.

A t_1, $x - x_0 = +A\sin[\omega_0(t_1-t_0)+\varphi] - \frac{fmg}{k}$

soit $x - x_0 = -A\sin\varphi - \frac{fmg}{k}$

Il faudrait chercher t_2 tel qu'il se remette à glisser.

Notons qu'il y a dissymétrie des positions (glissement - cessation du glissement)!

$t = t_0$ $\quad \begin{cases} x - x_0 = vt_1 = \frac{mf_0g}{k} \\ \dot{x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = \frac{mg}{k}(f_0 - f_c) \\ -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi = v \end{cases}$

$$x - x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{v^2 + \frac{m^2g^2(f_0-f_c)^2}{k}}\,\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) + \arctan\left(\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{(f_0-f_c)}\right)\right] + \frac{mf_cg}{k}$$

cela dure jusqu'à t_1 tq

$U = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = v$

$\Leftrightarrow -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t_1-t_0)+\varphi\right) = v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}(t_1 - t_0) + \varphi = 2\pi - \varphi$

$t_1 = t_0 + 2\sqrt{\frac{m}{k}}(\pi - \varphi)$

Chap VII : Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

C'est un mouvement très général utilisé dans les machines tournantes, les moteurs, les roues ..... Le mouvement de rotation engendre toutefois de fortes réactions d'axe : il faudra donc équilibrer les systèmes. Mais ceci est hors programme.

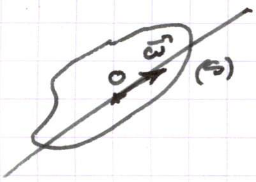
I Equations du mouvement :

① retour sur la liaison rotoïde :

Soit un solide S. Une liaison rotoïde permet d'imposer à (S) un mvt de rotation autour de l'axe (Δ) par des paliers de fixations - on a déjà vu les réalisations pratiques -.

Elle impose un seul degré de liberté à S.

La liaison est parfaite si la puissance des actions de contact soit nulle.



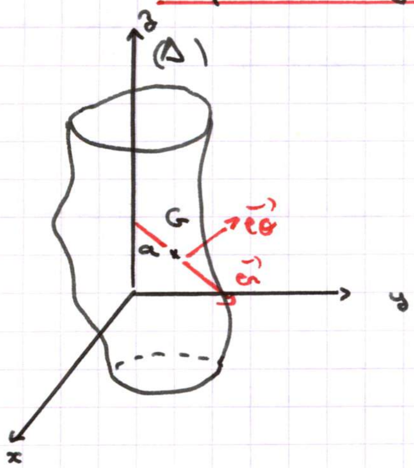
$$P = \vec{R}\cdot\vec{v_O} + \vec{\mathcal{M}_O}\cdot\vec{\omega}$$

or $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}$ $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ.
$\vec{v_O} = \vec{0}$

donc $P = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{M}_O}\cdot\vec{u} = 0$ soit $\mathcal{M}_\Delta = 0$

Il faut que $\vec{\mathcal{M}_O} \perp \vec{u}$

② équations générales du mouvement :



syst : solide (S)
réf : labo galiléen $[O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}]$

bilan : $[\vec{F_{ext}}, \vec{\mathcal{M}_{O\,ext}}]$ torseur des forces extérieures.
$[\vec{R}, \vec{G_O}]$ torseur des forces de liaison.

* Th. généraux :

$$m\,\vec{a_G} = \vec{F_{ext}} + \vec{R}$$

Or $\vec{a_G} = -a\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + a\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ on a donc 3 équations.

* Th. du moment cinétique en O :

O pt fixe : $\dfrac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_{O\,ext}} + \vec{G_O}$

Projetons sur Oz : $\dfrac{d\sigma_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz\,ext} + G_{Oz}$

Si J_{Oz} est le moment d'inertie de (S) par rapport à z, alors :

$\sigma_{Oz} = J_{Oz} \cdot \dot\theta$

donc $$\underline{J_{Oz}\ddot\theta = \mathcal{M}_{Oz\,ext} + G_{Oz}}$$

Cette équation pourrait déterminer le mvt mais G_{Oz} est en général inconnu. On fait donc l'hypothèse de la liaison parfaite : $G_{Oz} = 0$

Alors $$J_{Oz}\ddot\theta = \mathcal{M}_{Oz\,ext}$$

On peut aussi l'écrire : $$\underline{J_\Delta \ddot\theta = \mathcal{M}_\Delta}$$

J_Δ moment d'inertie de S par rapport à Δ.
$\mathcal{M}_\Delta$ moment des actions extérieures par rapport à Δ.

Faisons un bilan énergétique dans le cas de la liaison parfaite, c'est à dire que le système sera conservatif.

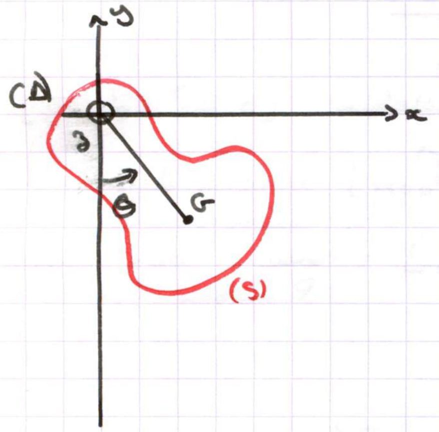
$$\frac{dE_c}{dt} = (\vec{F}_{ext} + \vec{R}) \cdot \underset{0}{\vec{v}_O} + (\vec{\mathcal{M}}_O + \vec{G}_O) \cdot \vec\omega$$

or $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot\theta^2$ donc $J_\Delta \cdot \ddot\theta\dot\theta = \mathcal{M}_\Delta \cdot \dot\theta$

On retrouve la même équation.

II Le pendule pesant :

① mise en équation :



Soit un solide de masse m, de moment d'inertie J par rapport à Δ.

On a OG = a.

La liaison en O est une liaison rotoïde parfaite.

syst : S
réf : labo galiléen.
bilan : $[-mg\vec{e_z}, \vec{OG} \wedge m\vec{g}]$
$[\vec{R}, \vec{G}_O]$ avec $G_{Oz} = 0$

En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\underline{J\ddot\theta = -mga\sin\theta}$$

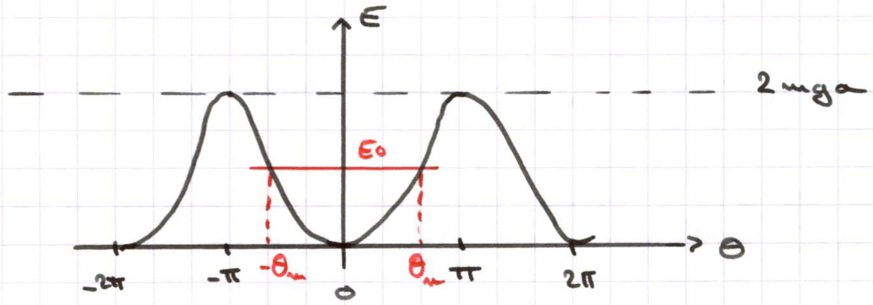
Discussion énergétique :

$E = E_c + E_p = cte$ donc $E = \frac{1}{2} J\dot\theta^2 + mga(1-\cos\theta) = E_0$

car on prend comme origine de l'E_p le point bas donc $E_p = 0$

quand $\theta = 0$.

donc $$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = E_0 - mga(1-\cos\theta)$$



Si $E_0 < 0$ pas de mouvement

Si $0 < E_0 < 2mga$ mvt périodique symétrique par rapport à 0. On parle de mvt oscillatoire de libration.

Si $E_0 > 2mga$ mvt de type fronde. Pas de limitation en θ. On a une rotation périodique.

② période des oscillations de grande amplitude :

On suppose le système S lâché avec un angle initial α_0 sans vitesse initiale.
L'équation de conservation de l'énergie donne :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = mga(\cos\theta - \cos\alpha_0) = 2mga\left(\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

En séparant les variables :

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J}{mga}} \frac{\pm d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$ il faut garder le signe − car quand $t \nearrow$, $\theta \searrow$.

Rq : pour des petites oscillations, $J\ddot{\theta} + mga\theta = 0$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$

Intégrons sur un quart de période :

$$\frac{T}{4} = -\frac{T_0}{4\pi}\int_{\alpha_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

On pose $\sin\varphi = \dfrac{\sin\theta/2}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}$ $\qquad \cos\varphi\, d\varphi = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\theta/2}{\sin\frac{\alpha_0}{2}} d\theta$

$$T = +\frac{T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\cdot\sin^2\varphi}}$$

On obtient donc l'expression générale de la période :

$$\boxed{T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}.\sin^2\varphi}}}$$

C'est une intégrale elliptique qu'on peut développer en $\sin^2\frac{\alpha_0}{2}$. (*)

Rq: la condition $\sin^2\frac{\alpha_0}{2} \ll 1$ nous permet des angles plus grand que la condition $\alpha_0 \ll 1$ utilisée pour le calcul de T_0.

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\sin^4\frac{\alpha_0}{2}.\sin^4\varphi + \dots\right)$$

$$\underline{T = T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\right)} \simeq \underline{T_0\left(1+\frac{\alpha_0^2}{16}+\dots\right)} \quad \text{si } \sin^2\frac{\alpha_0}{2} \simeq \frac{\alpha_0^2}{4}$$

Il n'y a plus isochronisme des oscillations : la période dépend de l'amplitude.

(*) $T = T(\alpha_0)$

Au voisinage de 0 : $T(\alpha_0) = T(0) + \alpha_0 T'(0) + \frac{\alpha_0^2}{2}T''(0)$

$$T(0) = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = T_0$$

$$T'(0) = \frac{2T_0}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi\, d\varphi}{\left(1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}}\right]_{\alpha_0=0} = 0$$

$$T''(0) = \frac{2T_0}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{4}\cos\alpha_0 \sin^2\varphi}{\left(1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}} + \frac{\frac{3}{4}\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^4\varphi\, d\varphi}{\left(1-\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi\right)^{5/2}}\right]_{\alpha_0=0}$$

$$= \frac{T_0}{8}$$

d'où $\quad T = T_0\left(1+\frac{\alpha_0^2}{16}\right)$